Convexité des fonctions différentiables

CloudSea

Cadre

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable
On donne deux CNS de convexité de f, une sur Df, l'autre sur $D^2 f$

Recasages :
- [[215 Calcul différentiel]]
- [[218 Formules de Taylor]]
- [[229 Fonctions monotones et convexes]]
- [[253 Convexité en analyse]]
Backup :
- [[206 Dimension finie en analyse]] a mettre dans le plan, remplacer extréma liés si on le sent pas

Référence : Rouvière p 127 et p 329

Déroulé du développement

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable

Une première CNS de convexité

On va montrer que f est convexe ssi pour tout $x, y \in \Omega, Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$

$\Rightarrow$
Soit $g(t) = f(x + t(y-x))$, calculons $g'(0)$ de deux manières différentes
La règle de la chaîne donne $g'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x)$ donc $g'(0) = Df(x)(y-x)$
Et le tau d'accroissement donne

$$\begin{aligned}\frac{g(t)-g(0)}{t} &= \frac{1}{t}\Big(f(x+t(y-x))-f(x)\Big)\\ &\leq \frac{1}{t}\Big(f(x)+t(f(y)-f(x))-f(x)\Big)\\ &= f(y)-f(x)\end{aligned}$$

Donc par passage à la limite on obtient bien $Df(x)(y-x) \leq f(y)-f(x)$

$\Leftarrow$
Soit $t \in [0,1]$ et $z_t = (1-t)x + ty$
Par hypothèse on a (1) : $f(z_t)+Df(z_t)(x-z_t) \leq f(x)$ et (2) : $f(z_t)+Df(z_t)(y-z_t) \leq f(y)$
On considère alors l'équation $(1-t)(1)+t(2)$

A droite on obtient bien $(1-t)f(x)+tf(y)$
Et à gauche on obtient $(1-t)f(z_t) \ + \ tf(z_t)+Df(z_t)((1-t)x+ty \ -(1-t)z_t - tz_t)$
Or $(1-t)f(z_t)+tf(z_t) = f(z_t)$, et le truc dans le $Df(z_t)$ vaut 0 donc comme $Df(z_t)$ est linéaire, le côté gauche faut $f(z_t)$, cqfd

Conséquence : un minimum local est forcément global

Si f admet un minimum local en x, on a $Df(x) = 0$, donc pour tout $y \in \Omega$, on a $0 \leq f(y)-f(x)$ i.e. $f(x) \leq f(y)$ donc x est un minimum global

Une 2e CNS

On va montrer que la première CNS est équivalente à $\forall x \in \Omega, D^2 f(x)$ est positive

$\Rightarrow$
Soit $h \in \mathbb{R}^n$, pour t assez petit $x+th \in \Omega$, et on a donc

$$f(x+th) = f(x) + Df(x)(th) + \frac{1}{2}D^2 f(x)(th,th) + o(t^2)$$

Donc

$$\begin{aligned}0 &\leq f(x+th)-f(x)-Df(x)(th)\\ &= \frac{1}{2}D^2 f(x)(th,th)+o(t^2)\\ &= \frac{t^2}{2}\Big(D^2 f(x)(h,h)+o(1)\Big)\end{aligned}$$

Donc $D^2f(x)(h,h) + o(1) \geq 0$, donc par passage à la limite, $D^2f(x)(h,h) \geq 0$

$\Leftarrow$
Soit $g(t) = f(x+th)$ où $h = y - x$, la formule de Taylor-Young donne s tq

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(s)$$

La règle de la chaîne donne $g'(t) = Df(x+th)(h)$ et donc $g''(t) = D^2f(x+th)(h,h)$
Donc

$$f(y) = f(x) + Df(x)(h) + D^2f(x)(h,h)$$

donc la positivité de D^2f donne bien

$$Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$$

Version révisions

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable
On se propose de montrer deux CNS de convexité de f
(1) : Pour tout $x, y \in U$, $Df(x)(y-x) \leq f(y) - f(x)$
(2) : Pour tout $x \in U$, $D^2f(x)$ est positive

1. Soit $g(t) = f(x + t(y-x))$, calculer $g'(t)$ et $g''(t)$
2. Montrer que $\frac{1}{t}(g(t) - g(0)) \leq f(y) - f(x)$ et en déduire le sens $\Rightarrow$ de (1)
3. Soit $z_t = (1-t)x + ty$, on a deux inégalité

$$(I_x) : Df(z_t)(x - z_t) \leq f(x) - f(z_t)$$
$$(I_y) : Df(z_t)(y - z_t) \leq f(y) - f(z_t)$$

Montrer la réciproque de (1) en considérant l'inégalité $(1-t)(I_x) + t(I_y)$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ et x, y tels que $h = y - x$

4. En faisant un DL à l'ordre 2 de g, montrer le sens direct de (2)
5. En faisant une formule de Taylor à l'ordre 2 de g, montrer la réciproque